平成25年度入学試験問題

数　学

注　意

1. 問題冊子は6ページ，解答紙は3枚である。問題冊子は，指示があるまで開かないこと。
2. 解答開始前に，試験監督者の指示にしたがって，すべての解答紙それぞれ2ケ所に受験番号を記入すること。
3. 「始め」の合図があったら，問題冊子のページ数を確認すること。
4. 解答は，黒色鉛筆(シャープペンシルも可)を使用し，すべて所定の欄に記入すること。欄外および裏面には記入しないこと。
5. 試験終了後，監督者の指示に従って，解答紙の順番をそろえること。
6. 下書き等は，問題冊子の余白を利用すること。
7. 解答紙は持ち帰らないこと。

$\boxed{1}$ 空欄にあてはまる適切な数，式，記号などを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 100 円，50 円，10 円の硬貨がそれぞれたくさんあるとする。ある品物を買うのに 2300 円かかるとき，このお金による支払い方の総数は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 整式 $P(x)$ を x^2-4x+3 で割ったときの余りは $x+1$ であり，x^2-3x+2 で割ったときの余りは $3x-1$ である。$P(x)$ を $x^3-6x^2+11x-6$ で割ったときの余りは $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) 数列の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2n}(k+n)^2}{\sum_{k=1}^{2n}k^2}$ の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で表される座標平面上の曲線を C とする。曲線 C 上の x 座標が $s\,(0<s<1)$ である点における接線を l とする。接線 l と曲線 C および x 軸，y 軸とで囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である。また，そのときの s の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(5) 原点を O とする座標平面上の 2 点 A(1, 0)，B(0, 1) を結ぶ線分上に点 P がある。$\theta=\angle\mathrm{AOP}$ とし，線分 OP の長さを r とするとき，r は θ の関数として $r=f(\theta)$ と表せる。このとき定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)\,d\theta$ の値は $\boxed{\text{カ}}$ であり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)^2\cos\theta\,d\theta$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(6) A が 1 枚のカードを，B が 4 枚のカードを持っている。表が出る確率と裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の偏りのないコインを投げて，表が出れば A は B からカードを 1 枚もらう。裏が出れば A は B にカードを 1 枚わたす。ただし，手もとにカードがなければわたさなくてよい。この試行を 4 回くり返した後，A の手もとに残るカードの枚数の期待値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

（計算用余白）

2 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において定義された2つの曲線

$$y = a\sin 2x$$

$$y = \sin 4x$$

について次の問いに答えなさい。ただし，a は定数である。

(1) 2つの曲線が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で交点を持つように a の値の範囲を定めなさい。

(2) a が(1)で定められた範囲にあるとき，2つの曲線によって囲まれた図形は(1)の交点を境にして2つの部分に分けられる。それらのうち原点を含む部分の面積を S_1，原点を含まない部分の面積を S_2 とする。$S_1 : S_2 = 4 : 1$ となるように a の値を定めなさい。

（計算用余白）

$\boxed{3}$ b を $b > 1$ となる定数とする。原点を O とする座標平面上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ の座標は $x_0^2 + y_0^2 = b$，$x_0^2 \geqq 1$ を満たすとする。このとき，点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{x_0}{\sqrt{3}},\ x_0 y_0^2\right)$ に対し，次の問いに答えなさい。

(1) $x_0^2 = t$ とおくとき，線分 OQ の長さの 2 乗 OQ^2 を t の関数として表しなさい。

(2) 線分 OQ の長さを最大にする x_0^2 を求めなさい。

（計算用余白）